



Une nouvelle méthode de relaxation pour les équations de Navier-Stokes compressibles. I: cadre théorique

Emmanuel Bongiovanni, Alexandre Ern, Nathalie Glinsky-Olivier

► To cite this version:

Emmanuel Bongiovanni, Alexandre Ern, Nathalie Glinsky-Olivier. Une nouvelle méthode de relaxation pour les équations de Navier-Stokes compressibles. I: cadre théorique. RR-4604, INRIA. 2002. inria-00071981

HAL Id: inria-00071981

<https://inria.hal.science/inria-00071981>

Submitted on 23 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***Une nouvelle méthode de relaxation pour les
équations de Navier-Stokes compressibles. I : cadre
théorique***

Emmanuel Bongiovanni — Alexandre Ern — Nathalie Glinsky-Olivier

N° 4604

Novembre 2002

_____ THÈME 4 _____



***rapport
de recherche***

Une nouvelle méthode de relaxation pour les équations de Navier-Stokes compressibles. I : cadre théorique

Emmanuel Bongiovanni*, Alexandre Ern[†], Nathalie Glinsky-Olivier[‡]

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Caiman

Rapport de recherche n° 4604 — Novembre 2002 — 29 pages

Résumé : On présente une nouvelle méthode de relaxation pour résoudre les équations de Navier-Stokes compressibles munies de lois de pression et de température générales, celles-ci étant compatibles avec l'existence d'une entropie et les relations de Gibbs. Notre méthode de relaxation s'inspire de la décomposition de l'énergie interne introduite dans [CP98] pour les équations d'Euler et conserve, en particulier, les mêmes conditions "sous-caractéristiques" pour la loi de pression du gaz fictif intervenant dans la relaxation. Nous introduisons une décomposition du flux de chaleur basée sur une température globale dépendant de l'entropie du gaz réel et de celle du gaz fictif. Grâce à cette décomposition, nous montrons la stabilité du processus de relaxation via la positivité de la production d'entropie. Une analyse asymptotique au premier ordre autour des états d'équilibre conduit également au résultat de stabilité. Nous présentons enfin une implémentation numérique de la méthode de relaxation qui permet d'utiliser de manière relativement immédiate les solveurs Navier-Stokes compressibles dédiés aux gaz thermiquement et calorifiquement parfaits (ou gaz parfaits polytropiques).

Mots-clés : Navier-Stokes, méthode de relaxation, estimation d'entropie, développement de Enskog-Chapman

* CERMICS-INRIA, Sophia Antipolis

[†] CERMICS, Marne-la-Vallée

[‡] CERMICS-INRIA, Sophia Antipolis

A new relaxation method for the compressible Navier-Stokes equations. I : the theory

Abstract: We present a new relaxation method for the solution of the compressible Navier-Stokes equations endowed with general pressure and temperature laws as long as they are compatible with the existence of an entropy and Gibbs relations. Our method relies on the internal energy decomposition introduced in [CP98] for the Euler equations and in particular, conserves the same “sub-characteristic” conditions for the pressure law of the fictitious gas considered in the relaxation. We introduce a splitting of the heat flux based on a global temperature defined in terms of the entropies of both the real and the fictitious gases. Using this splitting, we prove the stability of the relaxation process via the positivity of the entropy production. A first order asymptotic analysis around equilibrium states also yields the stability result. Finally, we present a numerical implementation of the relaxation method that allows a relatively straightforward use of compressible Navier-Stokes solvers designed for thermically and calorifically ideal gases (or ideal polytropic gases).

Key-words: Navier-Stokes, relaxation method, entropy estimate, Enskog-Chapman development

Table des matières

1	Introduction	3
2	Modélisation physique	6
2.1	Hypothèse fondamentale : existence d'une entropie	6
2.2	Modélisation des lois de pression et de température	6
2.2.1	Lois de pression et de température déduites de l'entropie	7
2.2.2	Lois de pression et de température données <i>a priori</i>	7
2.2.3	Lois de pression et d'énergie données <i>a priori</i>	7
2.2.4	Hypothèse de monotonie sur la pression	8
2.2.5	Capacités calorifiques	8
2.3	Bilan d'entropie	9
2.4	Condition d'hyperbolicité et entropie	10
2.5	Gaz thermiquement parfaits (TP)	11
2.5.1	Loi de Mariotte, loi de Joule et gaz parfaits	11
2.5.2	Modélisation du coefficient γ pour un gaz TP	12
2.5.3	Explicitation de l'entropie pour un gaz TP	13
3	Principe de la méthode de relaxation : équations d'Euler	14
3.1	Le système relaxé	14
3.2	Consistance du système relaxé	14
3.3	Stabilité du système relaxé	15
3.4	Analyse de stabilité asymptotique à l'ordre un	17
4	Extension aux équations de Navier-Stokes	19
4.1	Le système relaxé	19
4.2	Consistance du système relaxé	20
4.3	Stabilité du système relaxé	21
4.4	Analyse de stabilité asymptotique à l'ordre un	23
5	Mise en œuvre numérique	26
5.1	Algorithme	26
5.2	Perspectives d'applications	27
6	Conclusions	28

1 Introduction

De nombreuses applications des sciences de l'ingénieur font intervenir des écoulements de gaz régis par les équations de Navier-Stokes compressibles. Ces équations expriment la

conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie dans l'écoulement sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho U) = 0, \\ \partial_t (\rho U) + \nabla \cdot (\rho U \otimes U) + \nabla p = -\nabla \cdot \pi, \\ \partial_t E + \nabla \cdot ((E + p)U) = -\nabla \cdot (\pi \cdot U) - \nabla \cdot q, \end{cases} \quad (1)$$

où ρ est la densité, $U = (u_1, \dots, u_d)^T$ le vecteur vitesse, T la transposition, d la dimension d'espace, p la pression, π le tenseur flux d'impulsion ($-\pi$ est le tenseur des contraintes visqueuses), E l'énergie totale par unité de volume et q le vecteur flux de chaleur. Par la suite, nous noterons $W = (\rho, \rho U, E)^T \in \mathbb{R}^{d+2}$ le vecteur des variables conservatives. L'énergie totale par unité de volume se décompose sous la forme

$$E = \frac{1}{2} \rho U^2 + \rho \varepsilon, \quad (2)$$

où ε est l'énergie interne spécifique. Par ailleurs, le tenseur flux d'impulsion π et le vecteur flux de chaleur s'écrivent sous la forme

$$\pi = -\eta \left(\nabla U + \nabla U^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot U) I \right) \quad \text{et} \quad q = -\kappa \nabla T, \quad (3)$$

où η est la viscosité de cisaillement, κ la conductivité thermique et T la température.

Afin de fermer le système des équations de Navier-Stokes compressibles (1), il est nécessaire d'exprimer la pression p et la température T en fonction des variables conservatives W . Une modélisation thermodynamique particulièrement simple est celle du gaz thermiquement parfait et calorifiquement parfait (TPCP, encore appelé gaz parfait polytropique) pour lequel

(i) la pression est une fonction bilinéaire de ρ et ε sous la forme

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon, \quad (4)$$

où $\gamma > 1$ est une constante (qui est également donnée par le rapport entre les capacités calorifiques à pression et volume constant) ;

(ii) la température ne dépend pas de ρ et est linéaire en ε :

$$T = \frac{\gamma - 1}{R} \varepsilon, \quad (5)$$

où R est une constante (la constante des gaz parfaits divisée par la masse molaire du gaz).

De par sa simplicité, le modèle de gaz TPCP a été souvent considéré dans les applications. Il existe donc de nombreux codes dédiés à l'approximation numérique des équations de Navier-Stokes compressibles dans ce cadre, par exemple par des méthodes de type volumes finis. En raison des efforts de recherche importants qui leur ont été consacrés, la plupart de ces codes peuvent être considérés comme relativement robustes et fiables.

Cependant, pour de nombreux gaz, il est nécessaire de considérer une modélisation thermodynamique plus complexe que (4)–(5). C’est le cas par exemple pour les gaz polyatomiques où les molécules possèdent des degrés de liberté internes (rotation et vibration). Dans ces conditions, la dépendance de la pression et de la température en ε est non linéaire, la pression étant par ailleurs proportionnelle à la densité et à la température. Un autre exemple faisant intervenir des lois de pression et de température plus complexes que (4)–(5) est celui des écoulements à haute pression (typiquement au-dessus de 1000 atm). Dans ces conditions, les forces intermoléculaires ont un impact significatif sur la dynamique des collisions microscopiques ce qui conduit à une loi de pression non linéaire, tant en la densité qu’en l’énergie interne spécifique.

Une approche intéressante pour traiter les lois de pression et de température générales consiste à utiliser une méthode de relaxation. Les méthodes de relaxation pour les systèmes de lois de conservation hyperboliques ont été étudiées dans [Li87, C+95, JX95]. Pour les équations d’Euler, une méthode de relaxation a été développée récemment dans [CP98]. Le principe de la méthode consiste à relaxer la loi de pression non linéaire en considérant une décomposition de l’énergie interne spécifique de la forme $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. L’énergie interne ε_1 est typiquement associée à une loi de gaz TPCP et ε_2 représente la perturbation non linéaire. Durant le processus de relaxation, la perturbation non linéaire ε_2 est convectée par l’écoulement tandis que le gradient de pression présent dans l’équation de conservation de l’impulsion ne dépend que de ε_1 . Dans la limite d’un taux de relaxation infini, on retrouve le système des équations d’Euler avec la loi de pression initiale. D’un point de vue théorique, le résultat principal est que sous certaines conditions “sous-caractéristiques”, la stabilité du processus de relaxation est garantie par la positivité de la production d’entropie. D’un point de vue pratique, un avantage important de la méthode de relaxation est qu’elle permet d’étendre, avec très peu de modifications, les solveurs dédiés aux gaz TPCP à la simulation des équations d’Euler avec des lois de pression générales. Des résultats numériques obtenus avec cette méthode ont été présentés pour des schémas volumes finis [In99] ainsi que pour des schémas WENO [MS99].

Le but de notre travail est de développer un schéma de relaxation pour résoudre les équations de Navier-Stokes compressibles avec des lois de pression et de température générales. La différence essentielle avec les équations d’Euler est que la présence des flux diffusifs, et notamment du flux de chaleur, demande de prendre en compte non seulement la loi de pression du gaz réel mais également sa loi de température. Tout en conservant la même décomposition de l’énergie interne que celle introduite dans [CP98] afin d’assurer la stabilité des flux convectifs, nous introduisons une décomposition pondérée du vecteur flux de chaleur et du tenseur flux d’impulsion. Ainsi, sous certaines hypothèses sur les coefficients pondérateurs et sous les mêmes conditions “sous-caractéristiques” que pour les équations d’Euler, nous prouvons la positivité de la production d’entropie et donc la stabilité du processus de relaxation.

Dans la section suivante, nous présentons brièvement les hypothèses thermodynamiques sous-tendant notre modélisation physique. Puis, dans la section 3, nous rappelons les principaux résultats théoriques obtenus dans [CP98] pour la relaxation des équations d’Euler.

La nouvelle méthode de relaxation pour les équations de Navier-Stokes compressibles est présentée dans la section 4. Enfin, quelques aspects relatifs à la mise en œuvre numérique sont discutés dans la section 5. Pour une validation détaillée de la méthode sur plusieurs cas tests, nous renvoyons à [B+02].

2 Modélisation physique

L’objet de cette section est de préciser les hypothèses thermodynamiques sous-tendant notre modélisation physique. Pour des compléments sur les notions présentées dans cette section, le lecteur pourra par exemple consulter [Wo75, An89, EG94, Li96, GR96, Gi99].

Pour une fonction de deux variables $\varphi : (x, y) \mapsto \varphi(x, y)$, nous utiliserons la notation $\partial_{x,y}\varphi$ (resp. $\partial_{y,x}\varphi$) pour désigner la dérivée partielle de φ par rapport à la première (resp. deuxième) variable, la deuxième (resp. première) étant fixée. Les dérivées secondes de φ seront notées $\partial_{xx,y}\varphi$, $\partial_{xy}\varphi$ et $\partial_{yy,x}\varphi$. On utilisera également la notation abrégée $\varphi := \varphi(x, y)$ pour désigner la fonction φ .

2.1 Hypothèse fondamentale : existence d’une entropie

Nous supposons qu’en tout point de l’écoulement et à tout instant, les fluctuations autour de l’état d’équilibre thermodynamique sont suffisamment faibles pour utiliser localement les résultats classiques de la thermodynamique. En notant $\tau = \frac{1}{\rho}$ la dilatation, nous faisons l’hypothèse fondamentale suivante : il existe une fonction

$$s : (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon} = (0, \infty) \times (0, \infty) \mapsto s(\tau, \varepsilon),$$

appelée entropie spécifique et satisfaisant les deux propriétés suivantes :

- (p1) $\forall (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon}$, $\partial_{\varepsilon, \tau} s > 0$ et $\partial_{\tau, \varepsilon} s > 0$;
- (p2) s est strictement concave en (τ, ε) , i.e. $\forall (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon}$, la matrice

$$\begin{pmatrix} \partial_{\tau\tau, \varepsilon} s & \partial_{\tau\varepsilon} s \\ \partial_{\tau\varepsilon} s & \partial_{\varepsilon\varepsilon, \tau} s \end{pmatrix} \text{ est définie négative.} \quad (6)$$

Il est clair que la stricte concavité de s équivaut à

$$\forall (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon}, \quad \begin{cases} \partial_{\varepsilon\varepsilon, \tau} s < 0, \\ \partial_{\varepsilon\varepsilon, \tau} s \partial_{\tau\tau, \varepsilon} s - (\partial_{\tau\varepsilon} s)^2 > 0. \end{cases} \quad (7)$$

2.2 Modélisation des lois de pression et de température

Nous présentons ici trois approches pour modéliser les lois de pression et de température dans le cadre des hypothèses fondamentales de la section 2.1.

2.2.1 Lois de pression et de température déduites de l'entropie

Dans cette approche, on se donne *a priori* une fonction s satisfaisant **(p1)** et **(p2)**. Les lois de pression $p : (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon} \mapsto p(\tau, \varepsilon)$ et de température $T : (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon} \mapsto T(\tau, \varepsilon)$ se déduisent alors directement des relations de Gibbs

$$\forall (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon}, \quad \partial_{\varepsilon, \tau} s = \frac{1}{T} \quad \text{et} \quad \partial_{\tau, \varepsilon} s = \frac{p}{T}, \quad (8)$$

si bien que

$$\forall (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon}, \quad p(\tau, \varepsilon) = \frac{\partial_{\tau, \varepsilon} s}{\partial_{\varepsilon, \tau} s} \quad \text{et} \quad T(\tau, \varepsilon) = \frac{1}{\partial_{\varepsilon, \tau} s}. \quad (9)$$

Le dénominateur ne s'annule jamais en vertu de l'hypothèse **(p1)**.

Proposition 1. *La pression et la température données par (9) sont liées par la relation de compatibilité :*

$$\forall (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon}, \quad \partial_{\varepsilon, \tau} p = \frac{1}{T} (p \partial_{\varepsilon, \tau} T - \partial_{\tau, \varepsilon} T). \quad (10)$$

Elles vérifient de plus les propriétés suivantes :

$$\forall (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon}, \quad \begin{cases} \partial_{\varepsilon, \tau} T > 0, \\ \partial_{\tau, \varepsilon} p < \partial_{\varepsilon, \tau} p \left(\frac{\partial_{\tau, \varepsilon} T}{\partial_{\varepsilon, \tau} T} \right). \end{cases} \quad (11)$$

Preuve. (10) exprime simplement l'égalité des dérivées croisées de s par rapport à τ et ε . (11) équivaut aux propriétés de stricte concavité (7) pour l'entropie. \square

2.2.2 Lois de pression et de température données *a priori*

Dans cette approche, on se donne *a priori* deux lois constitutives, l'une pour la pression $p : (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon} \mapsto p(\tau, \varepsilon)$ et l'autre pour la température $T : (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon} \mapsto T(\tau, \varepsilon)$.

La proposition suivante précise les hypothèses qui doivent restreindre ces lois afin qu'elles restent compatibles avec les propriétés fondamentales **(p1)** et **(p2)**.

Proposition 2. *Soient deux fonctions $p : (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon} \mapsto p(\tau, \varepsilon)$ et $T : (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon} \mapsto T(\tau, \varepsilon)$, toutes deux à valeurs dans $(0, \infty)$. On suppose que ces fonctions satisfont la relation de compatibilité (10) et les inégalités (11). Alors, il existe une fonction $s : (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon} \mapsto s(\tau, \varepsilon)$ qui vérifie les relations de Gibbs (8) et les propriétés fondamentales **(p1)** et **(p2)**.*

Preuve. Analogue à celle de la proposition 1. \square

2.2.3 Lois de pression et d'énergie données *a priori*

Comme $\partial_{\varepsilon, \tau} T > 0$ pour tout $(\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon}$, on peut inverser la fonction

$$T_\tau : \varepsilon \in (0, \infty) \mapsto T(\tau, \varepsilon). \quad (12)$$

Il est donc possible de considérer le couple (τ, T) comme variables thermodynamiques indépendantes et de se donner deux lois d'état donnant la pression p et l'énergie interne spécifique ε en fonction de (τ, T) . Par la suite, nous ferons l'hypothèse thermodynamique raisonnable que

$$\forall \tau \in (0, \infty), \quad T(\tau, 0) = 0 \quad \text{et} \quad T(\tau, \infty) = \infty. \quad (13)$$

Dans ces conditions, la fonction inverse de (12) est définie pour $(\tau, T) \in \mathcal{O}_{\tau, T} = (0, \infty) \times (0, \infty)$.

La proposition suivante précise les conditions qui doivent restreindre les lois de pression et d'énergie afin que celles-ci restent compatibles avec les propriétés fondamentales **(p1)** et **(p2)**.

Proposition 3. *Soient deux fonctions $p : (\tau, T) \in \mathcal{O}_{\tau, T} \mapsto p(\tau, T)$ et $\varepsilon : (\tau, T) \in \mathcal{O}_{\tau, T} \mapsto \varepsilon(\tau, T)$, toutes deux à valeurs dans $(0, \infty)$. On suppose que ces fonctions satisfont la relation de compatibilité*

$$\forall (\tau, T) \in \mathcal{O}_{\tau, T}, \quad \partial_{\tau, T} \varepsilon = T \partial_{T, \tau} p - p, \quad (14)$$

et les inégalités

$$\forall (\tau, T) \in \mathcal{O}_{\tau, T}, \quad \begin{cases} \partial_{T, \tau} \varepsilon > 0, \\ \partial_{\tau, T} p < 0. \end{cases} \quad (15)$$

*Alors, il existe une fonction $s : (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon} \mapsto s(\tau, \varepsilon)$ qui vérifie les relations de Gibbs (8) et les propriétés fondamentales **(p1)** et **(p2)**.*

2.2.4 Hypothèse de monotonie sur la pression

Par la suite, nous ferons l'hypothèse suivante :

$$\forall \tau \in (0, \infty), \quad p(\tau, 0) = 0, \quad p(\tau, \infty) = \infty \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon \in (0, \infty), \quad \partial_{\varepsilon, \tau} p(\tau, \varepsilon) > 0. \quad (16)$$

Cette hypothèse permet d'une part d'inverser, pour tout $\tau \in (0, \infty)$, la fonction $p_\tau : \varepsilon \in (0, \infty) \mapsto p(\tau, \varepsilon) \in (0, \infty)$ et ainsi de considérer la pression comme variable thermodynamique indépendante. L'hypothèse (16) est d'autre part nécessaire pour définir la méthode de relaxation aussi bien pour les équations d'Euler que pour les équations de Navier-Stokes.

2.2.5 Capacités calorifiques

On définit la capacité calorifique à volume constant c_v , la capacité calorifique à pression constante c_p et l'exposant adiabatique γ_{adia} selon les relations

$$c_v = \partial_{T, \tau} \varepsilon, \quad c_p = \partial_{T, p} h, \quad \gamma_{\text{adia}} = \frac{c_p}{c_v}, \quad (17)$$

où $h = \varepsilon + p\tau$ est l'enthalpie spécifique.

Si les lois d'état $p : (\tau, T) \mapsto p(\tau, T)$ et $\varepsilon : (\tau, T) \mapsto \varepsilon(\tau, T)$ vérifient les hypothèses de la proposition 3, alors un calcul direct conduit à

$$\forall (\tau, T) \in \mathcal{O}_{\tau, T}, \quad c_p - c_v = -\frac{T(\partial_{T, \tau} p)^2}{\partial_{\tau, T} p} > 0.$$

Ce résultat montre que la différence $c_p - c_v$ ne dépend que des dérivées partielles de la pression mais pas de la forme de la loi $\varepsilon : (\tau, T) \mapsto \varepsilon(\tau, T)$. On remarque aussi que $c_p > c_v$, puisque $-\partial_{\tau, T} p$ est toujours positif. Cette propriété est fondamentalement liée à la concavité de l'entropie.

2.3 Bilan d'entropie

Soit $S(W) = \rho s$ l'entropie volumique associée au vecteur W des variables conservatives solution de (1). On a

$$\begin{aligned} \partial_t(S(W)) + \nabla \cdot (US(W)) &= \partial_t(\rho s) + \nabla \cdot (\rho s U) \\ &= \rho D_t s \\ &= \rho(\partial_{\tau, \varepsilon} s D_t \tau + \partial_{\varepsilon, \tau} s D_t \varepsilon), \end{aligned}$$

où nous avons introduit l'opérateur différentiel $D_t = \partial_t + U \cdot \nabla$. Or, nous déduisons de l'équation de conservation de la masse dans (1) que

$$D_t \tau = \tau \nabla \cdot U.$$

Par ailleurs, le bilan d'énergie cinétique $\frac{1}{2} \rho U^2$ résulte du bilan de masse et d'impulsion sous la forme

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho U^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho U^2 U \right) + U \cdot \nabla p = -(\nabla \cdot \pi) \cdot U.$$

En soustrayant cette équation à l'équation de conservation de l'énergie totale dans (1), nous obtenons l'équation de conservation de l'énergie interne spécifique sous la forme

$$\partial_t(\rho \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon U) + p \nabla \cdot U = -\nabla \cdot q - \pi : \nabla U,$$

si bien que

$$D_t \varepsilon = -\tau(p \nabla \cdot U + \nabla \cdot q + \pi : \nabla U).$$

En regroupant et en utilisant la relation de Gibbs (8) pour éliminer le terme en $\nabla \cdot U$, il vient

$$\partial_t(S(W)) + \nabla \cdot (US(W)) = -\frac{1}{T}(\nabla \cdot q + \pi : \nabla U).$$

Puisque $\nabla \cdot \left(\frac{q}{T} \right) = \frac{\nabla \cdot q}{T} - \frac{q \cdot \nabla T}{T^2}$, on obtient finalement le bilan d'entropie sous la forme

$$\partial_t(S(W)) + \nabla \cdot (S(W) U) = -\nabla \cdot \left(\frac{q}{T} \right) + \omega, \quad (18)$$

où ω est le taux de production d'entropie donné par

$$\omega = -\frac{q \cdot \nabla T}{T^2} - \frac{\pi : \nabla U}{T}.$$

En utilisant (3), il vient

$$\omega = \kappa \frac{\nabla T \cdot \nabla T}{T^2} + \eta \frac{\left(\nabla U + \nabla U^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot U)I \right) : \left(\nabla U + \nabla U^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot U)I \right)}{2T}.$$

D'après le deuxième principe de la thermodynamique, l'entropie spécifique s est telle que

$$\partial_t(\rho s) + \nabla \cdot (\rho s U) \geq -\nabla \cdot \left(\frac{q}{T} \right).$$

Les coefficients η et κ sont donc nécessairement positifs.

Le bilan d'entropie (18) n'est valable que pour des solutions régulières, ce qui est en général le cas pour les écoulements régis par les équations de Navier-Stokes compressibles. Par contre, pour les équations d'Euler (obtenues dans la limite où $\pi = 0$ et $q = 0$), il est bien connu que les solutions peuvent développer des chocs en temps fini. Dans ces conditions, la production d'entropie est nulle là où la solution est régulière mais est positive au niveau des chocs.

Remarque 4. Les expressions (3) pour π et q peuvent s'obtenir dans le cadre de la théorie cinétique des gaz en effectuant un développement de Enskog-Chapman à l'ordre un et en négligeant la viscosité volumique (ce qui est exact pour les gaz monoatomiques). Un des intérêts de la dérivation des flux diffusifs à partir de la théorie cinétique est de montrer que la positivité des coefficients η et κ est une conséquence de la structure dissipative des collisions microscopiques [CC70, FK72, EG94].

2.4 Condition d'hyperbolicité et entropie

La condition d'hyperbolicité se fonde sur les propriétés des flux convectifs du système de Navier-Stokes (et donc d'Euler). En variables physiques $V = (\rho, U, p)^T$ et sous forme non conservative, le système des équations d'Euler s'écrit sous la forme compacte

$$\partial_t V + A_x \cdot \partial_x V + A_y \cdot \partial_y V = 0,$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \omega_x u + \omega_y v & \rho \omega_x & \rho \omega_y & 0 \\ 0 & \omega_x u + \omega_y v & 0 & \tau \omega_x \\ 0 & 0 & \omega_x u + \omega_y v & \tau \omega_y \\ 0 & \tau(p \partial_{\varepsilon, \tau} p - \partial_{\tau, \varepsilon} p) \omega_x & \tau(p \partial_{\varepsilon, \tau} p - \partial_{\tau, \varepsilon} p) \omega_y & \omega_x u + \omega_y v \end{pmatrix},$$

où nous avons posé $A = \omega_x A_x + \omega_y A_y$ avec $(\omega_x, \omega_y) \neq (0, 0)$. Un calcul classique montre que la condition d'hyperbolicité

$$\forall (\tau, \varepsilon) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon}, \quad p \partial_{\varepsilon, \tau} p - \partial_{\tau, \varepsilon} p \geq 0, \quad (19)$$

est nécessaire et suffisante pour que les 4 valeurs propres de la matrice A soient réelles.

Proposition 5. *Sous les hypothèses thermodynamiques fondamentales (p1) et (p2), la condition d'hyperbolicité (19) est vérifiée.*

Preuve. On a

$$\partial_{\varepsilon\varepsilon,\tau}s \partial_{\tau\tau,\varepsilon}s - (\partial_{\tau\varepsilon}s)^2 = -\partial_{\varepsilon,\tau}s \partial_{\varepsilon\varepsilon,\tau}s (p\partial_{\varepsilon,\tau}p - \partial_{\tau,\varepsilon}p) - (\partial_{\varepsilon,\tau}p)^2 (\partial_{\varepsilon,\tau}s)^2.$$

La condition d'hyperbolicité résulte donc de la stricte concavité de l'entropie et des propriétés $\partial_{\varepsilon,\tau}s > 0$ et $\partial_{\varepsilon\varepsilon,\tau}s < 0$. \square

Remarque 6. On notera que la condition d'hyperbolicité (19) seule n'est pas suffisante pour garantir la propriété de concavité $\partial_{\varepsilon\varepsilon,\tau}s \partial_{\tau\tau,\varepsilon}s - (\partial_{\tau\varepsilon}s)^2 > 0$.

La condition d'hyperbolicité peut se reformuler de manière plus compacte en utilisant le couple (τ, s) comme variables thermodynamiques indépendantes, puisque l'on a

$$p\partial_{\varepsilon,\tau}p - \partial_{\tau,\varepsilon}p = -\partial_{\tau,s}p.$$

En conformité avec la théorie de l'acoustique, la vitesse du son c dans l'écoulement est définie par :

$$c = \sqrt{-\partial_{\rho,s}p} = \tau \sqrt{-\partial_{\tau,s}p} = \tau \sqrt{p\partial_{\varepsilon,\tau}p - \partial_{\tau,\varepsilon}p}, \quad (20)$$

et dans le cadre de cette théorie, on définit un coefficient γ , que nous noterons ici γ_{acou} , selon la relation

$$\gamma_{\text{acou}} = \frac{c^2}{\tau p}. \quad (21)$$

Un calcul direct montre que

$$\gamma_{\text{acou}} = \left(-\frac{\tau \partial_{\tau,TP}}{p} \right) \gamma_{\text{adia}}.$$

2.5 Gaz thermiquement parfaits (TP)

Les modèles de gaz thermiquement parfaits interviennent dans de nombreuses applications. L'objet de cette section est de passer en revue quelques-unes de leurs propriétés thermodynamiques.

2.5.1 Loi de Mariotte, loi de Joule et gaz parfaits

Définition 7 (Loi de Mariotte). *Un gaz satisfait la loi de Mariotte si sa pression s'exprime sous la forme :*

$$p = \rho f(T), \quad (22)$$

où $f : T \in (0, \infty) \mapsto f(T)$ est une fonction à valeurs dans $(0, \infty)$.

Définition 8 (Gaz TP). On dit qu'un gaz est thermiquement parfait (TP) s'il vérifie la loi de Mariotte avec une fonction $f : T \mapsto f(T)$ linéaire en la température. Dans ces conditions, on écrit

$$p = \rho RT, \quad (23)$$

où R est une constante qui ne dépend que de la nature du gaz considéré. On a $R = R_{GP}/m$ où R_{GP} est la constante universelle des gaz parfaits et m la masse molaire du gaz.

Définition 9 (Loi de Joule). On dit qu'un gaz satisfait la loi de Joule si son énergie interne ne dépend que de la température.

Une conséquence immédiate de la relation de compatibilité (14) est la proposition suivante :

Proposition 10.

- (i) un gaz TP vérifie la loi de Joule ;
- (ii) un gaz vérifiant la loi de Joule et la loi de Mariotte est nécessairement TP.

Pour un gaz TP, les capacités calorifiques sont données par

$$c_v(T) = \varepsilon'(T) \quad \text{et} \quad c_p(T) = c_v(T) + R,$$

si bien que

$$\gamma_{\text{adia}}(T) = 1 + \frac{R}{c_v(T)}.$$

De plus, pour tout gaz vérifiant la loi de Mariotte, et donc en particulier pour un gaz TP, on a

$$\gamma_{\text{acou}} = \gamma_{\text{adia}},$$

puisque la pression est proportionnelle à la densité. Dans ce cas, on notera simplement γ la valeur commune de ces deux coefficients.

Définition 11. Lorsque la quantité c_v dépend effectivement de T , on parle de gaz thermiquement parfait et calorifiquement imparfait (TPCI). Lorsque celle-ci ne dépend pas de T , on parle de gaz thermiquement et calorifiquement parfait (TPCP).

Pour un gaz TPCP, on a $(\gamma - 1)\varepsilon = (\gamma - 1)c_v T = RT = p/\rho$ si bien que $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$. On notera que cette relation ne se généralise pas aux gaz TPCI. En fait, on peut même montrer que si un gaz TP est tel que $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$, alors γ ne dépend pas de T . En effet, la relation $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ et la relation de compatibilité (10) impliquent que $\varepsilon(T) = \varepsilon'(T)T$, i.e que ε est homogène de degré un en T et donc que le gaz est TPCP.

2.5.2 Modélisation du coefficient γ pour un gaz TP

Dans les applications, un modèle souvent considéré pour les gaz TP consiste à se donner la capacité calorifique à volume constant sous la forme

$$c_v(T) = c_t + c_{t-r} + c_{t-r-v}(T).$$

La quantité $c_t = \frac{3}{2}R$ est la contribution macroscopique des échanges d'énergie translationnelle dans les collisions microscopiques, c_{t-r} prend en compte les degrés de liberté rotationnels (échanges rotation-rotation et rotation-translation) et $c_{t-r-v}(T)$ prend en compte les degrés de liberté vibrationnels (échanges vibration-vibration, vibration-rotation et vibration-translation). La contribution c_{t-r} se modélise en général de façon relativement simple en prenant $c_{t-r} = R$ pour les molécules linéaires et $c_{t-r} = \frac{3}{2}R$ pour les molécules de conformation plus complexe. Par contre, la forme fonctionnelle de $c_{t-r-v}(T)$ n'étant pas connue *a priori*, celle-ci est souvent modélisée par un polynôme obtenu par régression quadratique à partir de valeurs expérimentales. Dans tous les cas, on constate que

$$\gamma(T) = \frac{R}{c_v(T)} + 1 \leq \frac{R}{c_t} + 1 = \frac{5}{3}.$$

La borne supérieure est atteinte pour un gaz monoatomique, qui vérifie donc $\gamma = \frac{5}{3}$ indépendamment de T . Pour un gaz diatomique sans échanges d'énergie vibrationnelle (par exemple pour l'air à des températures pas trop élevées), on a $\gamma = \frac{7}{5}$ indépendamment de T . À des températures plus élevées, les transferts d'énergie vibrationnelle dans les collisions microscopiques ne sont plus négligeables et on a $\gamma = \gamma(T) \in (1, \frac{7}{5}]$ pour les gaz composés de molécules linéaires et $\gamma = \gamma(T) \in (1, \frac{4}{3}]$ pour les autres.

2.5.3 Explicitation de l'entropie pour un gaz TP

Pour un gaz TP, l'entropie spécifique s'exprime sous la forme

$$s(\tau, T) = \int_{T_0}^T \frac{c_v(u)}{u} du + R \log \frac{\tau}{\tau_0} + s_0,$$

où s_0 est l'entropie spécifique dans l'état de référence (τ_0, T_0) . Pour un gaz TPCP, c_v ne dépend pas de la température si bien que l'on a

$$s(\tau, T) = c_v \log \left(\frac{\tau^{\gamma-1} T}{\tau_0^{\gamma-1} T_0} \right) + s_0 = R \log \left(\frac{\tau T^{1/(\gamma-1)}}{\tau_0 T_0^{1/(\gamma-1)}} \right) + s_0.$$

Comme la capacité calorifique à volume constant c_v est minorée uniformément en la température par la constante $c_t > 0$, on constate que pour un gaz TP, l'entropie spécifique s explose en $\log T$ lorsque $T \rightarrow 0$. L'entropie spécifique s est également singulière lorsque la densité tend vers zéro mais l'entropie volumique ρs peut être prolongée par continuité en $\rho = 0$ en posant $0 \log 0 = 0$. La singularité de s en la température est intimement liée à la dérivation à partir de la théorie cinétique de la loi de pression, celle-ci reposant sur la statistique de Boltzmann. Or, le troisième principe de la thermodynamique ne s'applique pas à des gaz régis par la statistique de Boltzmann, mais à ceux régis par la statistique de Fermi-Dirac ou celle de Bose-Einstein. On pourra consulter [Wo75] pour des compléments. La singularité de s en $T = 0$ sera utilisée par la suite afin de contrôler la borne inférieure de l'énergie interne pour les équations de Navier-Stokes relaxées dans le cas d'écoulements de gaz TP.

3 Principe de la méthode de relaxation : équations d'Euler

L'objet de cette section est de présenter le principe de la méthode de relaxation sur le cas des équations d'Euler, obtenues pour $\pi = 0$ et $q = 0$ dans (1) :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho U) = 0, \\ \partial_t (\rho U) + \nabla \cdot (\rho U \otimes U) + \nabla p = 0, \\ \partial_t E + \nabla \cdot ((E + p)U) = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Les solutions de (24) développant en général des chocs en temps fini, les équations d'Euler sont complétées par la condition d'entropie

$$\partial_t (\rho \sigma) + \nabla \cdot (\rho \sigma U) \leq 0. \quad (25)$$

Ici, $\sigma = -s$ est l'entropie mathématique (par unité de masse).

Pour la preuve de l'ensemble des résultats présentés dans cette section, nous renvoyons à [CP98].

3.1 Le système relaxé

Le principe de la méthode de relaxation pour les équations d'Euler consiste à se donner une loi de pression $p_1 := p_1(\tau, \varepsilon_1)$ de façon à retrouver les équations d'Euler (24) et la condition d'entropie (25) dans la limite d'un taux de relaxation infini ($\lambda \rightarrow \infty$) à partir du système

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\lambda + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda) = 0, \\ \partial_t (\rho^\lambda U^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda \otimes U^\lambda) + \nabla p_1^\lambda = 0, \\ \partial_t E_1^\lambda + \nabla \cdot ((E_1^\lambda + p_1^\lambda)U^\lambda) = \lambda \rho^\lambda (\varepsilon_2^\lambda - F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)), \\ \partial_t (\rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda U^\lambda) = -\lambda \rho^\lambda (\varepsilon_2^\lambda - F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)), \end{cases} \quad (26)$$

avec les notations $p_1^\lambda = p_1(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)$, $\tau^\lambda = \frac{1}{\rho^\lambda}$ et $E_1^\lambda = \frac{1}{2} \rho^\lambda (U^\lambda)^2 + \rho^\lambda \varepsilon_1^\lambda$. On notera $\mathcal{W}^\lambda = (\rho^\lambda, \rho^\lambda U^\lambda, E_1^\lambda, \rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda)^T \in \mathbb{R}^{d+3}$ le vecteur des variables conservatives pour le système relaxé (26). Enfin, $F := F(\tau, \varepsilon_1)$ est une fonction définie sur \mathbb{R}_+^2 .

Le gaz régi par les équations d'Euler (24) avec la loi de pression $p := p(\tau, \varepsilon)$ sera appelé "gaz réel" et celui associé à la loi de pression $p_1 := p_1(\tau, \varepsilon_1)$ sera appelé "gaz fictif".

3.2 Consistance du système relaxé

La fonction F dans (26) est déterminée par la relation de consistance

$$\forall (\tau, \varepsilon_1) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon}, \quad p(\tau, \varepsilon_1 + F(\tau, \varepsilon_1)) = p_1(\tau, \varepsilon_1). \quad (27)$$

Cette relation définit bien F de manière univoque grâce à l'hypothèse (16) et au théorème des fonctions implicites. Nous introduisons la variété d'équilibre

$$\mathcal{V} = \{ (\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^3, \varepsilon_2 = F(\tau, \varepsilon_1) \}.$$

De (26), nous déduisons que pour un taux de relaxation infini, nous avons $\varepsilon_2^\infty = F(\tau^\infty, \varepsilon_1^\infty)$, i.e. $(\tau^\infty, \varepsilon_1^\infty, \varepsilon_2^\infty) \in \mathcal{V}$. En utilisant la relation de consistance (27), il vient

$$p(\tau^\infty, \varepsilon_1^\infty + \varepsilon_2^\infty) = p_1(\tau^\infty, \varepsilon_1^\infty).$$

Ainsi, en posant $E^\infty = E_1^\infty + \rho^\infty \varepsilon_2^\infty$, le vecteur $W^\infty = (\rho^\infty, (\rho U)^\infty, E^\infty)^T$ satisfait les équations d'Euler (24) avec la loi de pression du gaz réel.

Remarque 12. Dans la pratique, la méthode de relaxation est souvent mise en œuvre avec un gaz fictif TPCP si bien que

$$p_1(\tau, \varepsilon_1) = (\gamma_1 - 1) \frac{1}{\tau} \varepsilon_1,$$

où γ_1 est une constante fixée. Lorsque le gaz réel est TP, la relation de consistance (27) implique que

$$F := F(\varepsilon_1) = \varepsilon \left(\frac{\gamma_1 - 1}{R} \varepsilon_1 \right) - \varepsilon_1,$$

i.e. F ne dépend pas de τ . Si, de plus, le gaz réel est TPCP, on a

$$F(\varepsilon_1) = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma - 1} \varepsilon_1,$$

i.e. F est linéaire en ε_1 . Notons que dans les deux cas, on a

$$F'(\varepsilon_1) = \frac{\gamma_1 - \gamma(T_1)}{\gamma(T_1) - 1}, \quad (28)$$

où $T_1 = (\gamma_1 - 1)\varepsilon_1/R$ et γ est l'exposant adiabatique du gaz réel.

3.3 Stabilité du système relaxé

L'étude de stabilité du système relaxé repose sur la notion d'entropie. Plus précisément, en notant σ_1 l'entropie mathématique du gaz fictif introduit dans la méthode de relaxation, on souhaite construire une fonction $\Sigma := \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2)$ telle que

- Σ soit compatible avec l'entropie mathématique σ à l'équilibre

$$\forall (\tau, \varepsilon_1) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon}, \quad \sigma(\tau, \varepsilon_1 + F(\tau, \varepsilon_1)) = \Sigma(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), F(\tau, \varepsilon_1)); \quad (29)$$

- en posant $\mathcal{W} = (\rho, \rho U, E_1, \rho \varepsilon_2)^T \in \mathbb{R}^{d+3}$, la fonction

$$S := S(\mathcal{W}) = \rho \Sigma \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{\rho}, \frac{E_1}{\rho} - \frac{1}{2} U^2 \right), \varepsilon_2 \right), \quad (30)$$

soit strictement convexe en \mathcal{W} ;

– la solution \mathcal{W}^λ de (26) satisfasse une inégalité d'entropie de la forme

$$\partial_t S(\mathcal{W}^\lambda) + \nabla \cdot (U^\lambda S(\mathcal{W}^\lambda)) \leq 0.$$

Le théorème suivant précise les hypothèses sur la loi de pression p_1 pour assurer l'existence d'une fonction Σ jouissant des propriétés ci-dessus [CP98].

Théorème 13. *On suppose que les lois de pression $p := p(\tau, \varepsilon)$ et $p_1 := p_1(\tau, \varepsilon_1)$ sont respectivement associées à une entropie mathématique σ et σ_1 et que ces lois de pression vérifient toutes deux (16). On suppose de plus que la fonction $F(\tau, \varepsilon_1)$ définie implicitement par la relation (27) satisfait les conditions “sous-caractéristiques” suivantes :*

$$\begin{cases} \forall (\tau, \varepsilon_1) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon}, & \partial_{\varepsilon_1, \tau} F(\tau, \varepsilon_1) > 0, \\ \forall (\tau, \varepsilon_1) \in \mathcal{O}_{\tau, \varepsilon}, & c_1(\tau, \varepsilon_1) > c(\tau, \varepsilon_1 + F(\tau, \varepsilon_1)), \\ \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow \infty} F(\tau, \varepsilon_1) = \infty & \text{à } \sigma_1 \text{ fixée,} \end{cases} \quad (31)$$

où c et c_1 désignent respectivement la vitesse du son évaluée selon (20) pour le gaz réel et le gaz fictif. Dans ces conditions :

- (i) il existe une fonction $\Sigma := \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2)$ satisfaisant la relation de compatibilité (29) ;
- (ii) la fonction $S := S(\mathcal{W})$ définie par (30) est strictement convexe en \mathcal{W} à l'équilibre, i.e. pour $(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}$;
- (iii) Soit $\omega_e := \omega_e(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la fonction définie par

$$\omega_e(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{\tau} \left(\partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1(\tau, \varepsilon_1) - \partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) \right) (\varepsilon_2 - F(\tau, \varepsilon_1)). \quad (32)$$

Alors, en posant $\omega_e^\lambda = \omega_e(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda, \varepsilon_2^\lambda)$, on a

$$\partial_t S(\mathcal{W}^\lambda) + \nabla \cdot (U^\lambda S(\mathcal{W}^\lambda)) \leq \lambda \omega_e^\lambda,$$

avec égalité si la solution \mathcal{W}^λ de (26) est régulière. De plus, on a $\omega_e^\lambda \leq 0$ pour tout λ et $\omega_e^\lambda = 0$ si et seulement si $(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda, \varepsilon_2^\lambda) \in \mathcal{V}$, i.e. à l'équilibre.

La fonction ω_e donnée par (32) s'interprète comme la production d'entropie due à la relaxation pour les équations d'Euler. On notera que le théorème 13 ne donne pas la convexité de l'entropie S sur \mathbb{R}^{d+3} mais uniquement à l'équilibre. Cette restriction n'empêche pas de définir les chocs admissibles pour (26) puisque les non linéarités n'interviennent que dans les trois premières équations qui admettent l'entropie σ_1 .

Lorsque la loi de pression $p_1 := p_1(\tau, \varepsilon_1)$ est celle d'un gaz TPCP, les conditions sous-caractéristiques (31) se simplifient et on obtient également la convexité globale de l'entropie S .

Théorème 14. *On suppose que la loi de pression $p := p(\tau, \varepsilon)$ est associée à une entropie mathématique σ et qu'elle vérifie (16). On suppose en outre que $p_1(\tau, \varepsilon_1) = (\gamma_1 - 1) \frac{1}{\tau} \varepsilon_1$.*

Dans ces conditions,

(i) les conditions sous-caractéristiques (31) sont équivalentes à

$$\begin{cases} \gamma_1 > \sup_{\tau, \varepsilon} \gamma_{\text{acou}}(\tau, \varepsilon) & \text{où } \gamma_{\text{acou}}(\tau, \varepsilon) = \tau \left(\partial_{\varepsilon, \tau} p - \frac{1}{p} \partial_{\tau, \varepsilon} p \right), \\ \gamma_1 > \sup_{\tau, \varepsilon} \hat{\gamma}(\tau, \varepsilon) & \text{où } \hat{\gamma}(\tau, \varepsilon) = \tau \partial_{\varepsilon, \tau} p + 1. \end{cases} \quad (33)$$

(ii) la fonction $S := S(\mathcal{W})$ est strictement convexe en \mathcal{W} .

Lorsque le gaz réel est TP, les conditions sous-caractéristiques (33) se réduisent à

$$\gamma_1 > \sup_T \gamma(T), \quad (34)$$

puisque dans ce cas, $\hat{\gamma} = \gamma_{\text{acou}} = \gamma_{\text{adia}} = \gamma$ et que cette quantité ne dépend que de la température T .

Il sera utile pour la suite de rappeler quelques propriétés de la fonction $\Sigma := \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2)$ [CP98]. Tout d'abord, en notant \mathcal{O}_{σ_1} l'ensemble des réels atteignables par $\sigma_1(\tau, \varepsilon_1)$ lorsque (τ, ε_1) décrit $\mathcal{O}_{\tau, \varepsilon}$, la fonction Σ est définie sur $\mathcal{O}_{\sigma_1} \times \mathbb{R}_+$. De plus, dans le cadre des hypothèses du théorème 13, on montre qu'il existe deux fonctions $\mathcal{T} := \mathcal{T}(\sigma_1, \varepsilon_2)$ et $\mathcal{E}_1 := \mathcal{E}_1(\sigma_1, \varepsilon_2)$, toutes deux définies sur $\mathcal{O}_{\sigma_1} \times \mathbb{R}_+$ et telles que

$$\forall (\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}, \quad \begin{cases} \mathcal{T}(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) &= \tau, \\ \mathcal{E}_1(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) &= \varepsilon_1. \end{cases}$$

La fonction Σ est donnée par

$$\forall (\sigma_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{O}_{\sigma_1} \times \mathbb{R}_+, \quad \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) = \sigma \left(\mathcal{T}(\sigma_1, \varepsilon_2), \mathcal{E}_1(\sigma_1, \varepsilon_2) + \varepsilon_2 \right). \quad (35)$$

En utilisant la règle de la dérivation composée et quelques manipulations élémentaires, on vérifie aisément que

$$\partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) = \frac{\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma \left(\mathcal{T}(\sigma_1, \varepsilon_2), \mathcal{E}_1(\sigma_1, \varepsilon_2) + \varepsilon_2 \right)}{\partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1 \left(\mathcal{T}(\sigma_1, \varepsilon_2), \mathcal{E}_1(\sigma_1, \varepsilon_2) \right)} > 0, \quad (36)$$

et que

$$\partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) = \partial_{\varepsilon, \tau} \sigma \left(\mathcal{T}(\sigma_1, \varepsilon_2), \mathcal{E}_1(\sigma_1, \varepsilon_2) + \varepsilon_2 \right) < 0. \quad (37)$$

Ces relations seront utiles dans la section suivante pour définir une température globale lors de la relaxation du système de Navier-Stokes.

3.4 Analyse de stabilité asymptotique à l'ordre un

On s'intéresse à des petites perturbations de la solution $\mathcal{W}^\lambda = (\rho^\lambda, \rho^\lambda U^\lambda, E_1^\lambda, \rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda)^T \in \mathbb{R}^{d+3}$ de (26) autour des états d'équilibre. Plus précisément, en posant $\varepsilon^\lambda = \varepsilon_1^\lambda + \varepsilon_2^\lambda$ et en notant $\varepsilon_1^{\lambda, 0}$ la solution unique de

$$\varepsilon^\lambda = \varepsilon_1^{\lambda, 0} + F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda, 0}), \quad (38)$$

on considère pour l'énergie interne spécifique ε_1^λ un développement asymptotique à l'ordre un de la forme

$$\varepsilon_1^\lambda = \varepsilon_1^{\lambda,0} + \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \quad (39)$$

En utilisant (38), l'énergie interne spécifique ε_2^λ se développe sous la forme

$$\varepsilon_2^\lambda = F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^{\lambda,0}) - \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \quad (40)$$

Notre objectif est de préciser au premier ordre en $\frac{1}{\lambda}$ le système de lois de conservation dont le vecteur

$$\overline{W}^\lambda = (\rho^\lambda, \rho^\lambda U^\lambda, E_1^\lambda + \rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda)^T \in \mathbb{R}^{d+2}, \quad (41)$$

est solution. On posera $\tau^\lambda = \frac{1}{\rho^\lambda}$, $E^\lambda = \frac{1}{2} \rho^\lambda (U^\lambda)^2 + \rho^\lambda \varepsilon^\lambda$ et $p^\lambda = p(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda)$.

Proposition 15. *Le vecteur \overline{W}^λ donné par (41) est solution, à l'ordre un en $\frac{1}{\lambda}$, du système de lois de conservation*

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\lambda + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda) = 0, \\ \partial_t (\rho^\lambda U^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda \otimes U^\lambda) + \nabla p^\lambda = \frac{1}{\lambda} \nabla (\mu_e^\lambda \nabla \cdot U^\lambda), \\ \partial_t E^\lambda + \nabla \cdot ((E^\lambda + p^\lambda) U^\lambda) = \frac{1}{\lambda} \nabla \cdot (\mu_e^\lambda U^\lambda \nabla \cdot U^\lambda), \end{cases} \quad (42)$$

où $\mu_e^\lambda = \mu_e(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda)$ et la fonction $\mu_e := \mu_e(\tau, \varepsilon)$ est donnée par

$$\mu_e(\tau, \varepsilon) = \tau \frac{\partial_{\varepsilon, \tau} p}{\partial_{\varepsilon_1, \tau} p_1} (c_1^2 - c^2), \quad (43)$$

les quantités $\partial_{\varepsilon, \tau} p$ et c étant évaluées en (τ, ε) et les quantités $\partial_{\varepsilon_1, \tau} p_1$ et c_1 en (τ, ε_1) où ε_1 est la solution unique de $\varepsilon = \varepsilon_1 + F(\tau, \varepsilon_1)$.

Une conséquence immédiate des conditions sous-caractéristiques (31) est que la fonction μ_e définie par (43) est à valeurs positives. Cette propriété est particulièrement agréable puisqu'en notant $S^\lambda = \rho^\lambda \sigma(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda)$ l'entropie mathématique (par unité de volume) associée à la solution \overline{W}^λ de (42), et en supposant \overline{W}^λ régulière, on a

$$\partial_t S^\lambda + \nabla \cdot (U^\lambda S^\lambda) = -\frac{\mu_e^\lambda}{\lambda T^\lambda} (\nabla \cdot U^\lambda)^2 \leq 0,$$

où $T^\lambda = -(\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda))^{-1}$ est la température naturellement associée au gaz réel. Cette propriété confirme la stabilité du système asymptotique (42).

4 Extension aux équations de Navier-Stokes

L'objet de cette section est d'étendre aux équations de Navier-Stokes compressibles (1) les considérations théoriques développées dans la section précédente pour les équations d'Euler. La différence essentielle avec les équations d'Euler est que la présence des flux diffusifs, et notamment du flux de chaleur, demande de prendre en compte non seulement la loi de pression du gaz réel mais également sa loi de température en fonction de la dilatation et de l'énergie interne spécifique. Comme pour les équations d'Euler, on conviendra d'appeler "gaz réel" le gaz effectivement considéré dans le modèle physique et "gaz fictif" celui introduit dans la méthode de relaxation.

4.1 Le système relaxé

Nous présentons la méthode de relaxation appliquée aux équations de Navier-Stokes dans un cadre relativement général. Outre la fonction $F := F(\tau, \varepsilon_1)$ introduite pour les équations d'Euler, nous nous donnons trois fonctions

$$\begin{cases} \alpha &:= \alpha(\tau, \varepsilon_1), & (\tau, \varepsilon_1) \in \mathbb{R}_+^2, \\ \beta &:= \beta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2), & (\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^3, \\ \Theta &:= \Theta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2), & (\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^3, \end{cases}$$

les deux premières correspondant à des coefficients de pondération sans dimension et la troisième ayant les dimensions d'une température. La fonction Θ est à valeurs dans \mathbb{R}_+ et représente une température "globale" pour le système de Navier-Stokes relaxé.

Notre objectif est de retrouver les équations de Navier-Stokes (1) dans la limite d'un taux de relaxation infini ($\lambda \rightarrow \infty$) à partir du système

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\lambda + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda) = 0, \\ \partial_t (\rho^\lambda U^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda \otimes U^\lambda) + \nabla p_1^\lambda = -\nabla \cdot \pi^\lambda, \\ \partial_t E_1^\lambda + \nabla \cdot ((E_1^\lambda + p_1^\lambda) U^\lambda) = -\nabla \cdot (\pi^\lambda \cdot U^\lambda) - \nabla \cdot q_1^\lambda + P_1^\lambda, \\ \partial_t (\rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda U^\lambda) = -P_1^\lambda - P_2^\lambda. \end{cases} \quad (44)$$

Comme précédemment, nous utilisons l'indice supérieur λ pour indiquer qu'une fonction est évaluée en ses arguments avec l'indice supérieur λ , i.e. $p_1^\lambda = p_1(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)$ où $\tau^\lambda = \frac{1}{\rho^\lambda}$ et $\varepsilon_1^\lambda = \tau^\lambda E_1^\lambda - \frac{1}{2}(U^\lambda)^2$, $\alpha^\lambda = \alpha(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)$, etc. On notera à nouveau $\mathcal{W}^\lambda = (\rho^\lambda, \rho^\lambda U^\lambda, E_1^\lambda, \rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda)^T \in \mathbb{R}^{d+3}$ le vecteur des variables conservatives pour le système relaxé (44).

Les termes de perturbation (qui sont des fonctions des variables conservatives) s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} P_1 = \alpha(\pi : \nabla U + \nabla \cdot q_1) + \lambda \rho(\varepsilon_2 - F(\tau, \varepsilon_1)) \\ P_2 = \beta \nabla \cdot q_2, \end{cases} \quad (45)$$

avec les flux de chaleur q_1 et q_2 définis par

$$q_1 = -\kappa \nabla T_1, \quad q_2 = \mathcal{Q} - q_1, \quad \mathcal{Q} = -\kappa \nabla \Theta,$$

où $T_1 := T_1(\tau, \varepsilon_1)$ est la température du gaz fictif ($T_1(\tau, \varepsilon_1) = (\gamma_1 - 1)\varepsilon_1/R$ si le gaz fictif est TPCP). Pour simplifier la présentation, nous supposons par la suite que la conductivité thermique est constante.

On notera que le membre de droite de l'équation de E_1^λ dans (44) s'écrit

$$-(\nabla \cdot \pi^\lambda) \cdot U^\lambda - (1 - \alpha^\lambda)(\pi^\lambda : \nabla U^\lambda + \nabla \cdot q_1^\lambda) + \lambda \rho^\lambda(\varepsilon_2^\lambda - F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)),$$

alors que le membre de droite de l'équation de $\rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda$ s'écrit

$$-\alpha^\lambda(\pi^\lambda : \nabla U^\lambda + \nabla \cdot q_1^\lambda) - \beta^\lambda \nabla \cdot q_2^\lambda - \lambda \rho^\lambda(\varepsilon_2^\lambda - F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda)).$$

Le coefficient α permet donc de pondérer les contributions de la dissipation visqueuse et de la diffusion de chaleur entre les deux bilans d'énergie considérés. On notera également que seul le flux de chaleur lié au gaz fictif intervient dans l'équation de E_1^λ et que ε_2^λ n'intervient que par le biais du terme de relaxation déjà introduit pour les équations d'Euler.

4.2 Consistance du système relaxé

Proposition 16. *On suppose que*

- (i) *la fonction F est déterminée par la relation de consistance (27) ;*
- (ii) *$\forall(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}$, $\beta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1$;*
- (iii) *$\forall(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}$, $\Theta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = -1/\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma(\tau, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$.*

Alors, le vecteur $W^\infty = (\rho^\infty, U^\infty, E^\infty)^T \in \mathbb{R}^{d+2}$ avec $E^\infty = E_1^\infty + \rho^\infty \varepsilon_2^\infty$ satisfait les équations de Navier-Stokes compressibles (1) avec les lois de pression et de température du gaz réel.

Preuve. Pour un taux de relaxation infini, nous avons clairement

$$(\tau^\infty, \varepsilon_1^\infty, \varepsilon_2^\infty) \in \mathcal{V},$$

si bien que grâce à la relation de consistance (27), nous obtenons

$$p(\tau^\infty, \varepsilon_1^\infty + \varepsilon_2^\infty) = p_1(\tau^\infty, \varepsilon_1^\infty).$$

Par ailleurs, en sommant les troisième et quatrième équations dans (44) et en posant $\varepsilon^\infty = \varepsilon_1^\infty + \varepsilon_2^\infty$ et $E^\infty = E_1^\infty + \rho^\infty \varepsilon_2^\infty$, nous obtenons, grâce aux hypothèses sur β et Θ , l'équation de conservation de l'énergie sous la forme

$$\partial_t E^\infty + \nabla \cdot ((E^\infty + p^\infty)U^\infty) = -\nabla \cdot (\pi^\infty \cdot U^\infty) - \nabla \cdot q^\infty,$$

avec le flux de chaleur $q^\infty = -\kappa \nabla T^\infty$ où $T^\infty = -1/\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma(\tau^\infty, \varepsilon^\infty)$ est la température du gaz réel. \square

Remarque 17. Dans le cas général, on n'a pas nécessairement égalité des températures du gaz réel et du gaz fictif à l'équilibre, i.e. $T^\infty \neq T_1^\infty$ *a priori*. Un cas particulier remarquable est celui où le gaz réel est TPCI et le gaz fictif TPCP. En effet, la température a alors la même forme fonctionnelle en la densité et la pression pour le gaz réel et le gaz fictif, si bien que $T^\infty = T_1^\infty$ et par suite $q_2^\infty = 0$.

4.3 Stabilité du système relaxé

Cette section présente notre résultat principal concernant la stabilité du système Navier-Stokes relaxé (44). Il montre en particulier qu'afin de garantir la stabilité de (44), les fonctions β et Θ doivent être choisies de façon précise : la fonction β est donnée par

$$\begin{cases} \forall (\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^3, \\ \beta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \alpha + (1 - \alpha) \frac{\partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1(\tau, \varepsilon_1)}{\partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1 \left(T(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2), \mathcal{E}_1(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) \right)}, \end{cases} \quad (46)$$

et la fonction Θ par

$$\begin{cases} \forall (\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathbb{R}_+^3, \\ \Theta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = - \left((1 - \alpha) \partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1(\tau, \varepsilon_1) + \alpha \partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2) \right)^{-1}, \end{cases} \quad (47)$$

le coefficient α étant évalué en (τ, ε_1) .

Théorème 18. *Avec les hypothèses du théorème 13, on suppose que les fonctions β et Θ sont données par (46) et (47) et que la fonction α est à valeurs dans $[0, 1]$. Alors, les hypothèses de consistance énoncées à la proposition 16 sont satisfaites. On suppose de plus que la solution \mathcal{W}^λ de (44) est régulière et que $\varepsilon_2^\lambda \in \mathbb{R}_+$ à tout temps et en tout point de l'écoulement. Soit S la fonction définie par (30) dont l'existence est garantie par le théorème 13. Alors, on a*

$$\forall \lambda, \quad \partial_t S(\mathcal{W}^\lambda) + \nabla \cdot \left(U^\lambda S(\mathcal{W}^\lambda) \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\mathcal{Q}^\lambda}{\Theta^\lambda} \right) = \lambda \omega_e^\lambda + \frac{\pi^\lambda \cdot \nabla U^\lambda}{\Theta^\lambda} + \frac{\mathcal{Q}^\lambda \cdot \nabla \Theta^\lambda}{(\Theta^\lambda)^2} \leq 0, \quad (48)$$

où la contribution $\omega_e^\lambda = \omega_e(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda, \varepsilon_2^\lambda)$ est évaluée, comme pour les équations d'Euler relaxées, selon (32).

Remarque 19. On note que les trois contributions à la dissipation d'entropie (dus respectivement à la relaxation, au flux de quantité de mouvement et au flux de chaleur) sont négatives indépendamment.

Preuve. (i) Vérifions d'abord les hypothèses de consistance énoncées à la proposition 16. Afin d'alléger les notations, nous omettons les arguments des fonctions Σ et σ_1 lorsque ceux-ci sont $(\sigma_1(\tau, \varepsilon_1), \varepsilon_2)$ et (τ, ε_1) respectivement. Nous constatons que $\Theta > 0$ puisque $0 \leq \alpha \leq 1$ et que les deux termes $\partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1$ et $\partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma$ sont négatifs d'après les relations (36) et (37). De plus, toujours en utilisant (36) et (37), nous constatons que pour $(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}$, nous avons

$$\partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1 = \partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma = \partial_{\varepsilon, \tau} \sigma(\tau, \varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

si bien que $\Theta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = -1/\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma(\tau, \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ pour $(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}$. De plus, il est clair que nous avons $\beta(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1$ pour $(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{V}$. Les hypothèses de consistance de la proposition 16 sont donc bien satisfaites pour les fonctions β et Θ données par (46) et (47).

(ii) Passons maintenant au bilan d'entropie (48). Nous omettrons l'indice λ afin d'alléger les notations. En utilisant la règle de la dérivation composée, il vient

$$\begin{aligned}\partial_t S + \nabla \cdot (US) &= \partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma (\partial_t (\rho \sigma_1) + \nabla \cdot (\rho U \sigma_1)) \\ &+ \partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma (\partial_t (\rho \varepsilon_2) + \nabla \cdot (\rho U \varepsilon_2)).\end{aligned}$$

Comme $\sigma_1 := \sigma_1(\tau, \varepsilon_1)$, on a

$$\begin{aligned}\partial_t (\rho \sigma_1) + \nabla \cdot (\rho U \sigma_1) &= \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1 (\partial_t (\rho \varepsilon_1) + \nabla \cdot (\rho U \varepsilon_1)) + \partial_{\tau, \varepsilon_1} \sigma_1 \nabla \cdot U \\ &= \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1 (-\pi : \nabla U - \nabla \cdot q_1 - p_1 \nabla \cdot U + P_1) + \partial_{\tau, \varepsilon_1} \sigma_1 \nabla \cdot U.\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\partial_t (\rho \varepsilon_2) + \nabla \cdot (\rho U \varepsilon_2) = -P_1 - P_2.$$

En regroupant, il vient

$$\begin{aligned}\partial_t S + \nabla \cdot (US) &= \partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1 (-\pi : \nabla U - \nabla \cdot q_1 + P_1) \\ &+ \partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma (-P_1 - P_2) \\ &+ \partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma (\partial_{\tau, \varepsilon_1} \sigma_1 - p_1 \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1) \nabla \cdot U.\end{aligned}$$

La contribution de $\nabla \cdot U$ est nulle grâce à la relation de Gibbs. En explicitant P_1 et P_2 , on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t S + \nabla \cdot (US) &= -(\alpha \partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma + (1 - \alpha) \partial_{\sigma_1, \varepsilon_2} \Sigma \partial_{\varepsilon_1, \tau} \sigma_1)(\pi : \nabla U + \nabla \cdot q_1) \\ &- \beta \partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma \nabla \cdot q_2 \\ &+ \lambda \omega_e.\end{aligned}$$

Le facteur entre parenthèses devant $(\pi : \nabla U + \nabla \cdot q_1)$ vaut par définition $-1/\Theta$. Par ailleurs, de (46) et des relations (36) et (37), nous déduisons que $\beta \partial_{\varepsilon_2, \sigma_1} \Sigma = -1/\Theta$. Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned}\partial_t S + \nabla \cdot (US) &= \frac{1}{\Theta} (\pi : \nabla U + \nabla \cdot q_1 + \nabla \cdot q_2) + \lambda \omega_e \\ &= \frac{1}{\Theta} (\pi : \nabla U + \nabla \cdot \mathcal{Q}) + \lambda \omega_e,\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve. \square

On note que la stabilité du système Navier-Stokes relaxé suppose l'estimation *a priori* $\varepsilon_2^\lambda \in \mathbb{R}_+$. Le système d'Euler relaxé admet le domaine d'invariance $(\varepsilon_1^\lambda, \varepsilon_2^\lambda) \in \mathbb{R}_+^2$ puisque à τ fixé, la fonction $\varepsilon_1 \mapsto F(\tau, \varepsilon_1)$ est par hypothèse strictement croissante avec $F(\tau, 0) = 0$ et que ε_2^λ est régi par une équation de convection-diffusion dont le terme source vaut $-\lambda \rho^\lambda (\varepsilon_2^\lambda - F(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda))$. Par contre, pour le système Navier-Stokes relaxé, l'estimation *a priori* $\varepsilon_2^\lambda \in \mathbb{R}_+$ n'est pas claire *a priori* à cause de la présence de termes source supplémentaires dans l'équation de ε_2^λ . Elle peut toutefois s'obtenir à partir de l'estimation d'entropie du théorème 18 lorsque l'entropie du gaz réel et celle du gaz fictif sont singulières lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Proposition 20. *On suppose que la solution \mathcal{W}^λ de (44) est régulière et que l'entropie du gaz réel et celle du gaz fictif sont singulières lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans ces conditions, le système (44) admet le domaine d'invariance $\varepsilon_2^\lambda > 0$.*

Preuve. L'hypothèse sur les entropies implique que l'entropie globale Σ explose lorsque $\varepsilon_2^\lambda \rightarrow 0$. Or, celle-ci est régie par l'équation de bilan (48) et ne peut donc exploser en temps fini si la solution \mathcal{W}^λ est régulière. \square

4.4 Analyse de stabilité asymptotique à l'ordre un

On s'intéresse à des petites perturbations de la solution \mathcal{W}^λ de (44) autour des états d'équilibre. En considérant la même approche que pour les équations d'Euler relaxées, notre objectif est de préciser au premier ordre en $\frac{1}{\lambda}$ le système de lois de conservation dont le vecteur

$$\overline{W}^\lambda = (\rho^\lambda, \rho^\lambda U^\lambda, E_1^\lambda + \rho^\lambda \varepsilon_2^\lambda)^T \in \mathbb{R}^{d+2},$$

est solution. Nous reprenons les notations utilisées dans la section 3.4. Les énergies internes spécifiques ε_1^λ et ε_2^λ sont donc à nouveau données à l'ordre un en $\frac{1}{\lambda}$ par les développements asymptotiques (39) et (40).

Les résultats présentés dans cette section sont restreints au cas où le gaz réel est TP et le gaz fictif TPCP. Dans ce cas (voir remarque 12), la fonction F ne dépend que de ε_1 . Nous supposons dans cette section que la fonction α s'exprime sous la forme

$$\alpha(\varepsilon_1) = \frac{F'(\varepsilon_1)}{1 + F'(\varepsilon_1)}. \quad (49)$$

Notons qu'en vertu de la première condition sous-caractéristique (31), on a bien $0 \leq \alpha \leq 1$. De plus, en utilisant (28), nous pouvons réécrire (49) sous la forme

$$\alpha(\varepsilon_1) = \frac{\gamma_1 - \gamma(T_1)}{\gamma_1 - 1}, \quad (50)$$

où $T_1 = (\gamma_1 - 1)\varepsilon_1/R$ et $\gamma(T)$ est l'exposant adiabatique du gaz réel.

Proposition 21. *On considère un écoulement où le gaz réel est TPCI et le gaz fictif TPCP. On suppose que la fonction α est donnée par (49) et que les fonctions β et Θ sont données par (46) et (47). Alors, le vecteur $\overline{W}^\lambda \in \mathbb{R}^{d+2}$ est solution, à l'ordre un en $\frac{1}{\lambda}$, du système de lois de conservation*

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\lambda + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda) = 0, \\ \partial_t (\rho^\lambda U^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda \otimes U^\lambda) + \nabla p^\lambda = -\nabla \cdot \pi^\lambda + \frac{1}{\lambda} \nabla (\mu_e^\lambda \nabla \cdot U^\lambda), \\ \partial_t E^\lambda + \nabla \cdot ((E^\lambda + p^\lambda) U^\lambda) = -\nabla \cdot (\pi^\lambda \cdot U^\lambda) - \nabla \cdot q^\lambda + \frac{1}{\lambda} \nabla \cdot (\mu_e^\lambda U^\lambda \nabla \cdot U^\lambda), \end{cases} \quad (51)$$

où μ_e est donnée par (43), $q^\lambda = -\kappa \nabla T^\lambda$ et $T^\lambda = -1/\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda)$, σ étant l'entropie mathématique du gaz réel.

Preuve. Nous omettons la plupart des indices λ afin d'alléger les notations mais l'indice supérieur $(\lambda, 0)$ sera conservé afin d'indiquer qu'une fonction qui dépend de ε_1 est évaluée en la valeur d'équilibre $\varepsilon_1^{\lambda,0}$.

(i) En utilisant les développements asymptotiques (39) et (40), on obtient

$$\lambda(F(\varepsilon_1) - \varepsilon_2) = \varepsilon_1^{\lambda,1}(1 + F'(\varepsilon_1^{\lambda,0})) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

En identifiant les termes d'ordre zéro dans la quatrième équation de (44), il vient

$$\begin{aligned} \rho\varepsilon_1^{\lambda,1}(1 + F'(\varepsilon_1^{\lambda,0})) - \alpha^{\lambda,0}S^{\lambda,0} - P_2^{\lambda,0} &= \rho\partial_t F^{\lambda,0} + \rho U \cdot \nabla F^{\lambda,0} \\ &= F'(\varepsilon_1^{\lambda,0})(\rho\partial_t \varepsilon_1^{\lambda,0} + \rho U \cdot \nabla \varepsilon_1^{\lambda,0}), \end{aligned}$$

où on a posé $S^{\lambda,0} = (\pi : \nabla U + \nabla \cdot q_1)^{\lambda,0}$. Comme par hypothèse le gaz réel est TPCI et le gaz fictif TPCP, leurs températures coïncident à l'équilibre si bien que $P_2^{\lambda,0} = 0$. En identifiant maintenant les termes d'ordre zéro dans la troisième équation de (44) et en utilisant la deuxième équation de (44) pour éliminer la conservation de l'énergie cinétique, on obtient

$$\rho\partial_t \varepsilon_1^{\lambda,0} + \rho U \cdot \nabla \varepsilon_1^{\lambda,0} = -\rho\varepsilon_1^{\lambda,1}(1 + F'(\varepsilon_1^{\lambda,0})) - p_1^{\lambda,0} \nabla \cdot U - (1 - \alpha^{\lambda,0})S^{\lambda,0}.$$

Des deux équations ci-dessus et de la relation (49), on déduit aisément que

$$\begin{aligned} (1 + F'(\varepsilon_1^{\lambda,0}))^2 \varepsilon_1^{\lambda,1} &= -\tau \nabla \cdot U p_1^{\lambda,0} F'(\varepsilon_1^{\lambda,0}) + \tau \left(\alpha^{\lambda,0} - (1 - \alpha^{\lambda,0}) F'(\varepsilon_1^{\lambda,0}) \right) S^{\lambda,0} \\ &= -\tau \nabla \cdot U p_1^{\lambda,0} F'(\varepsilon_1^{\lambda,0}), \end{aligned}$$

d'où l'on tire $\varepsilon_1^{\lambda,1}$. On remarquera que la contribution de $S^{\lambda,0}$ disparaît grâce au choix (49) pour le coefficient pondérateur α .

(ii) En sommant les deux équations de l'énergie dans (44), on obtient

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\lambda + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda) = 0, \\ \partial_t (\rho^\lambda U^\lambda) + \nabla \cdot (\rho^\lambda U^\lambda \otimes U^\lambda) + \nabla p_1^\lambda = -\nabla \cdot \pi^\lambda, \\ \partial_t E^\lambda + \nabla \cdot ((E^\lambda + p_1^\lambda) U^\lambda) = -\nabla \cdot (\pi^\lambda \cdot U^\lambda) - \nabla \cdot Q^\lambda + (1 - \beta^\lambda) \nabla \cdot q_2^\lambda. \end{cases}$$

Or, à l'ordre un en $\frac{1}{\lambda}$, on a

$$p_1^\lambda = p_1(\tau^\lambda, \varepsilon_1^\lambda) = p(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda) + \frac{1}{\lambda} \partial_{\varepsilon_1, \tau} p_1(\tau, \varepsilon_1^{\lambda,0}) \varepsilon_1^{\lambda,1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

et

$$(1 - \beta^\lambda) \nabla \cdot q_2^\lambda = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

puisque $1 - \beta^\lambda = \mathcal{O}(\frac{1}{\lambda})$ et $q_2^\lambda = \mathcal{O}(\frac{1}{\lambda})$. On retrouve donc le système (51) à l'ordre un en $\frac{1}{\lambda}$ avec le flux de chaleur Q^λ à la place de q^λ .

(iii) Dans le cadre d'une relaxation entre un gaz TPCI et un gaz TPCP, un calcul direct permet de vérifier que les fonctions \mathcal{T} et \mathcal{E}_1 introduites dans la section 3.3 sont explicitement données sous la forme

$$\mathcal{T}(\sigma_1, \varepsilon_2) = e^{-\sigma_1/R} \left(F^{-1}(\varepsilon_2) \right)^{-1/(\gamma_1-1)} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_1(\varepsilon_2) = F^{-1}(\varepsilon_2),$$

\mathcal{E}_1 ne dépendant donc pas de σ_1 . Or, comme l'entropie mathématique σ d'un gaz TPCI s'écrit à une constante additive près sous la forme $\sigma(\tau, \varepsilon) = -R \log \tau + \Phi(\varepsilon)$ où Φ est une certaine fonction de l'énergie interne uniquement, nous déduisons de la définition (35) que l'entropie globale Σ se décompose sous la forme

$$\Sigma(\sigma_1, \varepsilon_2) = \sigma_1 + \Psi(\varepsilon_2),$$

avec

$$\Psi(\varepsilon_2) = \frac{R}{\gamma_1 - 1} \log F^{-1}(\varepsilon_2) + \Phi(F^{-1}(\varepsilon_2) + \varepsilon_2).$$

Les relations ci-dessus impliquent que la température globale Θ donnée par (47) s'écrit sous la forme d'une moyenne harmonique

$$\frac{1}{\Theta} = \frac{1 - \alpha}{T_1} + \frac{\alpha}{T_*}, \quad (52)$$

où $T_1 = (\gamma_1 - 1)\varepsilon_1/R$ est la température du gaz fictif et

$$T_* = -\frac{1}{\partial_{\varepsilon, \tau} \sigma \left(\mathcal{T}(\sigma_1, \varepsilon_2), \mathcal{E}_1(\varepsilon_2) + \varepsilon_2 \right)},$$

s'interprète comme la température qu'aurait le gaz réel à l'équilibre. De la relation (50), nous déduisons que

$$\frac{1}{\Theta^\lambda} = \frac{\gamma(T_1^\lambda) - 1}{\gamma_1 - 1} \frac{1}{T_1^\lambda} + \frac{\gamma_1 - \gamma(T_1^\lambda)}{\gamma_1 - 1} \frac{1}{T_*^\lambda}. \quad (53)$$

Il reste à développer Θ^λ à l'ordre un en $\frac{1}{\lambda}$. Nous savons déjà que

$$\Theta^{\lambda,0} = T_1^{\lambda,0} = T_*^{\lambda,0} = T^\lambda.$$

À l'ordre un en $\frac{1}{\lambda}$, il n'est donc pas nécessaire de prendre en compte les variations de $\gamma(T_1^\lambda)$ mais uniquement celles des températures T_1^λ et T_*^λ . D'une part, on a

$$T_1^\lambda = T^\lambda + \frac{\gamma_1 - 1}{R} \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1}.$$

D'autre part, puisque

$$\mathcal{E}_1(\varepsilon_2^\lambda) + \varepsilon_2^\lambda = \varepsilon^\lambda - \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 - \gamma^{\lambda,0}} \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1},$$

on obtient

$$T_*^\lambda = T^\lambda - \frac{1}{c_v^{\lambda,0}} \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 - \gamma^{\lambda,0}} \frac{1}{\lambda} \varepsilon_1^{\lambda,1}.$$

En reportant dans (53), il vient

$$\Theta^\lambda = T^\lambda + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

ce qui complète la preuve. \square

Le système approché obtenu dans la proposition 21 est bien compatible avec la condition d'entropie. En effet, notons $S^\lambda = \rho^\lambda \sigma(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda)$ l'entropie mathématique associée à la solution \overline{W}^λ de (51), $T^\lambda = -1/\partial_{\varepsilon,\tau} \sigma(\tau^\lambda, \varepsilon^\lambda)$ la température et $q^\lambda = -\kappa \nabla T^\lambda$ le flux de chaleur. En supposant \overline{W}^λ régulière, un calcul direct conduit au bilan d'entropie sous la forme

$$\partial_t S^\lambda + \nabla \cdot (U^\lambda S^\lambda) - \nabla \cdot \left(\frac{q^\lambda}{T^\lambda} \right) = -\frac{\mu_e^\lambda}{\lambda T^\lambda} (\nabla \cdot U^\lambda)^2 + \frac{\pi^\lambda : \nabla U^\lambda}{T^\lambda} + \frac{q^\lambda \cdot \nabla T^\lambda}{(T^\lambda)^2} \leq 0,$$

les trois termes du membre de droite étant négatifs indépendamment. Cette propriété confirme le résultat fondamental de stabilité obtenu dans le théorème 18.

5 Mise en œuvre numérique

5.1 Algorithme

Une façon pratique de résoudre le système de Navier-Stokes (1) dans le cadre de la méthode de relaxation est la suivante. On se donne un gaz fictif TPCP satisfaisant les conditions “sous-caractéristiques” (33). À partir de la solution numérique au temps discret t^n , $W^n = (\rho^n, \rho^n U^n, E^n)$, l'algorithme comprend trois étapes :

1) décomposition initiale. On évalue l'énergie interne spécifique $\varepsilon^n = \frac{E^n}{\rho^n} - \frac{1}{2}(U^n)^2$, la dilatation $\tau^n = \frac{1}{\rho^n}$ et la pression $p^n = p(\tau^n, \varepsilon^n)$, puis on calcule les énergies internes

$$\varepsilon_1^n = \frac{p(\rho^n, \varepsilon^n)}{(\gamma_1 - 1) \rho^n} \quad \text{et} \quad \varepsilon_2^n = \varepsilon^n - \varepsilon_1^n,$$

ainsi que la température $T_1^n = (\gamma_1 - 1) \varepsilon_1^n / R$.

2) étape prédicteur : évolution en temps. Le système Navier-Stokes relaxé (44) est intégré entre t^n et t^{n+1} dans la limite de l'équilibre $\lambda \rightarrow \infty$. Les fonctions α , β et Θ sont évaluées respectivement selon (49), (46) et (47) si bien que la stabilité du système relaxé résulte du théorème 18. Numériquement, ces fonctions sont traitées explicitement en temps en les évaluant à t^n .

Les trois premières équations de (44) se découplent de la dernière. En éliminant les indices λ pour simplifier, elles s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho U) = 0, \\ \partial_t (\rho U) + \nabla \cdot (\rho U \otimes U) + \nabla p_1 = -\nabla \cdot \pi, \\ \partial_t E_1 + \nabla \cdot ((E_1 + p_1)U) = -\nabla \cdot (\pi \cdot U) - \nabla \cdot q_1 + \alpha(t^n)(\pi : \nabla U + \nabla \cdot q_1). \end{cases} \quad (54)$$

Elles correspondent aux équations de Navier-Stokes compressibles pour le gaz fictif TPCP (modulo le coefficient pondérateur $\alpha(t^n)$).

La dernière équation exprime le transport de ε_2^λ sous la forme

$$\partial_t (\rho \varepsilon_2) + \nabla \cdot (\rho \varepsilon_2 U) = -\alpha(t^n)(\pi : \nabla U + \nabla \cdot q_1)(t^n) - \nabla \cdot q_2(t^n). \quad (55)$$

On notera que le terme source est traité explicitement en l'évaluant à t^n et qu'on a utilisé le fait que $\beta(t^n) = 1$.

L'intégration consécutive de (54) puis de (55) de t^n à t^{n+1} fournit les valeurs

$$\begin{pmatrix} \rho \\ (\rho U) \\ E_1 \\ \rho \varepsilon_2 \end{pmatrix}^{n+1-}.$$

3) projection au temps suivant. La solution numérique au temps t^{n+1} , W^{n+1} , est obtenue par projection

$$\begin{cases} \rho^{n+1} = \rho^{n+1-}, \\ (\rho U)^{n+1} = (\rho U)^{n+1-}, \\ E^{n+1} = E_1^{n+1-} + (\rho \varepsilon_2)^{n+1-}. \end{cases}$$

5.2 Perspectives d'applications

Ce schéma de relaxation présenté dans la section 5.1 s'applique à n'importe quelle méthode de résolution des équations de Navier-Stokes compressibles pour un gaz TPCP.

Nous l'avons mis en pratique sur plusieurs cas tests dans [B+02] en résolvant le système (54)–(55) par une méthode mixte volumes finis/éléments finis applicable à des maillages triangulaires non structurés. Les flux convectifs sont calculés en utilisant un schéma de Roe d'ordre 3 en espace grâce à la combinaison de la méthode MUSCL et d'un β -schéma. Les flux diffusifs ainsi que les termes supplémentaires provenant de la méthode de relaxation sont approchés par une technique d'interpolation éléments finis P1 [F+89]. Le schéma d'intégration en temps est explicite et basé sur une méthode de Runge-Kutta à 4 pas. Le pas de temps est calculé en utilisant une condition de type CFL étendue au cas des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles et dépendant des nombres de Reynolds et de Prandtl [F+89].

6 Conclusions

Dans ce travail, nous avons proposé une nouvelle méthode de relaxation pour les équations de Navier-Stokes compressibles. Cette méthode est une extension de celle développée dans [CP98] pour les équations d'Euler. Notre résultat principal est que modulo une décomposition adéquate des flux diffusifs, il est possible de montrer la stabilité du système relaxé via une analyse de la production d'entropie. Une analyse de stabilité asymptotique à l'ordre un confirme ce résultat. Nous avons enfin proposé une implémentation numérique de la méthode de relaxation qui permet comme pour les équations d'Euler, d'utiliser de manière relativement immédiate les codes dédiés à la résolution numérique des équations de Navier-Stokes compressibles pour des gaz thermiquement parfaits et calorifiquement parfaits (TPCP ou gaz parfaits polytropiques). Des applications à divers cas tests seront présentées dans [B+02].

Références

- [An89] ANDERSON JR., J.D., *Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1989.
- [B+02] BONGIOVANNI, E., ERN, A., GLINSKY-OLIVIER, N., "Une nouvelle méthode de relaxation pour les équations de Navier-Stokes compressibles. II : validation numérique", Rapport de recherche INRIA, 2002.
- [CC70] CHAPMAN, S., COWLING, T.G., *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases*, Cambridge University Press, Cambridge, 1970.
- [C+95] CHEN, G.-Q., LEVERMORE, C.D., LIU, T.P., "Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy", *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 48, 1995, pp. 787-830.
- [CP98] COQUEL, F., PERTHAME, B., "Relaxation of energy and approximate Riemann solvers for general pressure laws in fluid dynamics", *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 35, 1998, pp. 2223-2249.
- [EG94] ERN, A., GIOVANGIGLI, V., *Multicomponent Transport Algorithms*, Lecture Notes in Physics, series monographs, vol. m24, Springer, Heidelberg, 1994.
- [FK72] FERZIGER, J.H., KAPER, H.G., *Mathematical Theory of Transport Processes in Gases*, North Holland, Amsterdam, 1972.
- [F+89] FÉZOU, L., LANTÉRI, S., LARROUTUROU, B., OLIVIER, C., "Résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible en maillage triangulaire", Rapport de recherche INRIA No. 1033, 1989.
- [Gi99] GIOVANGIGLI, V., *Multicomponent Flow Modeling*, Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology, Birkhäuser, Basel, 1999.
- [GR96] GODLEWSKI, E., RAVIART, P.-A., *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, Springer, New York, 1996.

-
- [In99] IN, A., “Numerical evaluation of an energy relaxation method for inviscid real fluids”, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 21, No. 1, 1999, pp. 340-365.
- [JX95] JIN, S., XIN, Z., “The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimension”, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 48, 1995, pp. 235-276.
- [Li96] LIONS, P.-L., *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [Li87] LIU, T.P., “Hyperbolic conservation laws with relaxation”, *Comm. Math. Phys.*, vol. 108, 1987, pp. 153-175.
- [MS99] MONTARNAL, P., SHU, C.-W., “Real gas computation using an energy relaxation method and high-order WENO schemes”, *J. Comput. Phys.*, vol. 148, 1999, pp. 59-80.
- [Wo75] WOODS, L.C., *The Thermodynamics of Fluid Systems*, Clarendon Press, Oxford, 1975.



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399